

Arithmétique

I Divisibilité

définition : On dit qu'un entier a est divisible par un autre entier b si le reste de la division Euclidienne de a par b est nul.

exemples :

21 est-il divisible par 5 ? Non car $21 = 5 \times 4 + 1$

30 est-il divisible par 6 ? Oui car $30 = 6 \times 5 + 0$

II Critères de divisibilité

A] Par 2, 5 et 10

Propriété : Un nombre est divisible par :

- 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- 10 si son chiffre des unités est 0.

exemples :

13 a pour chiffre des unités 3, donc il n'est pas divisible par 2, 5 ou 10.

40 a pour chiffre des unités 0, donc il est divisible par 2, 5 et 10.

Démonstration du critère de divisibilité par 2 :

Un entier dont le chiffre des unités est u et dont le nombre de dizaines est D s'écrit

$$10 \times D + u.$$

Or $10 \times D$ est divisible par 2 car il s'écrit $2 \times 5 \times D$, donc l'entier $10 \times D + u$ est divisible par 2 dès lors que u est pair.

B] Par 3 et 9

Propriété : Un nombre est divisible par :

- 3 si la somme de ses chiffres est 3, 6 ou 9
- 9 si la somme de ses chiffres est 9

exemples : 456 est-il divisible par 3 ou 9 ? On a $4+5+6=15$ et $1+5=6$. Donc 456 est divisible par 3 mais pas par 9.

Démonstration du critère de divisibilité par 9 :

Un entier n dont les chiffres sont $abcde$ s'écrit

$$n = 10000 \times a + 1000 \times b + 100 \times c + 10 \times d + e$$

On utilise les égalités suivantes :

$$10 = 9 + 1, \quad 100 = 99 + 1, \quad 1\,000 = 999 + 1, \quad 10\,000 = 9\,999 + 1, \text{ etc.}$$

Par conséquent, $n = (9999 + 1) \times a + (999 + 1) \times b + (99 + 1) \times c + (9 + 1) \times d + e$

$$n = 9999 \times a + 999 \times b + 99 \times c + 9 \times d + a + b + c + d + e$$

$$n = 9 \times (1111 \times a + 111 \times b + 11 \times c + d) + a + b + c + d + e$$

D'où n est divisible par 9 dès lors que la somme de ses chiffres $a + b + c + d + e$ est divisible par 9.

III Nombres premiers

Définition : Un nombre est dit "premier" si il possède exactement deux diviseurs.

Remarque : les deux diviseurs d'un nombre premier sont forcément 1 et lui-même.

exemples: 1 n'est pas premier car son unique diviseur est 1. 2 est premier car il admet exactement deux diviseurs qui sont 1 et 2.

Comment savoir rapidement si un nombre est premier ou pas ?

Crible d'Eratostène :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

IV Décomposition en produit de facteurs premiers (DFP)

Propriété : tout entier peut s'écrire comme le produit de nombres premiers.

Exemple : $14 = 2 \times 7$

V PGCD et PPCM

Définition :

- Le PGCD de deux entiers est leur Plus Grand Commun Diviseur
- Le PPCM de deux entiers est leur Plus Petit Commun Multiple

exemples : Le PGCD de 6 et 10 est 2. On note $\text{PGCD}(6;10)=2$

Le PPCM de 6 et 10 est 30. On note $\text{PPCM}(6;10)=30$

Détermination du PGCD et du PPCM

$$12 = 2^2 \times 3 \text{ et } 10 = 2 \times 5$$

Pour le PGCD on prend tout ce qu'il y a en commun avec la plus petite puissance donc 2.

Pour le PPCM on prend tous les facteurs avec la plus grande puissance donc

$$2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

A] Simplification de fractions

Propriété : Soient a et b deux entiers, alors $\frac{a}{b} = \frac{a \div \text{pgcd}(a;b)}{b \div \text{pgcd}(a;b)}$ et ceci est sa forme réduite.

Exemples : Simplifier au maximum $\frac{105}{135}$.

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$135 = 3^3 \times 5 \quad \text{Donc} \quad \text{PGCD}(105;135) = 3 \times 5 = 15$$

Donc on peut simplifier la fraction par 15.

$$\text{on a } \frac{105}{135} = \frac{105 \div 15}{135 \div 15} = \frac{7}{9}$$

B] Lots identiques

exemple : Un fleuriste dispose de 248 roses et 186 jonquilles. Il souhaite faire le plus possible de lots identiques comprenant les deux sortes de fleurs. Combien de lots peut-il faire au maximum ? Quelle sera la composition de chaque lot ?

Réponse : Le nombre de lots qu'il peut faire au maximum est le PGCD de 248 et 186.

On a : $248 = 2^3 \times 31$ et $186 = 2 \times 3 \times 31$

Donc $PGCD(248; 186) = 2 \times 31 = 62$

Il pourra donc faire 62 lots au maximum.

Dans chaque lot il y aura $\frac{248}{62} = 4$ roses et $\frac{186}{62} = 3$ jonquilles.